Dopo aver fatto la rilevazione dei dati di un certo fenomeno, è utile, a volte necessario, sintetizzare la distribuzione mediante valori che la caratterizzano e permettano di confrontarla con distribuzione di fenomeni analoghi osservati in tempi o in luoghi diversi.

Un primo valore con tali caratteristiche è dato da un valore medio.

L'utilizzo di una *media* ha, in genere, lo scopo di semplificare una determinata questione sostituendo in un problema, a due o più quantità date, una sola che sia adeguata a sintetizzarle senza alterare la visione dell'aspetto di interesse del fenomeno considerato.

Possiamo definire la media di un insieme di dati seguendo O. Chisini (Sul concetto di media, in *Periodico di matematiche*, 1929), nel seguente modo:

"la media di una distribuzione $x_1,\ldots.,x_n$ (relativa ad un carattere trasferibile) rispetto ad una funzione $f(x_1,\ldots.,x_n)$ è quella quantità x che sostituita alle x_i nella funzione lascia invariato il risultato, ovvero soddisfa l'uguaglianza:

$f(x_1,\ldots.,x_n) = f(x,x,\ldots.,x)$"

La *media semplice* è un valore che è compreso tra il maggiore ed il minore di una distribuzione e sintetizza l'andamento e le caratteristiche della distribuzione stessa.

La *media ponderata* è quella ottenuta su una distribuzione di frequenza dove le frequenze, misurando l'importanza relativa di ogni termine, costituiscono i pesi dei termini stessi.

Vi sono vari tipi di media:

- Media aritmetica semplice e ponderata
- Media geometrica semplice e ponderata
- Media armonica semplice e ponderata
- Media quadratica

Media aritmetica semplice e ponderata

La *media aritmetica semplice* è quel valore che sostituito ai singoli valori della distribuzione non ne fa variare la somma.

Si ottiene sommando i termini x_i della distribuzione e dividendo tale somma per il loro numero n :

[redacted]
.

E' la più usata anche se il suo valore risulta influenzato dalle variazioni dei termini originari.

Nel caso in cui i valori x_i hanno diverse frequenze, cioè compaiono più volte, allora denotando con y_i le frequenze associate ai vari x_i abbiamo la *media aritmetica ponderata* :

[redacted]

La media aritmetica ponderata riceve frequenti applicazioni nelle scienze sperimentali.

Quando la misura di una data grandezza, ad esempio del peso di un corpo, è determinata da più osservatori, molto raramente accade che si ottengano risultati tutti uguali e dei diversi valori così ottenuti si calcola, allora, la media. Però, poiché a ciascuno di questi valori è da attribuirsi una diversa fiducia (diversa secondo l'abilità dell'osservatore, la precisione degli strumenti di misura adoperati ed altri fattori) si esprime questa diversa fiducia, nel calcolare la media dei valori ottenuti, assegnando a ciascuno di quei valori un opportuno peso.

La media aritmetica è un valore compreso fra il più piccolo e il più grande di un insieme di osservazioni.

Infatti ordiniamo i valori delle x_i in modo crescente:

x_1 2 3 $n-1$ x_1

In modo analogo, sostituendo il valore maggiore x_n ai valori $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ si ottiene:

[redacted]

Possiamo affermare che:

M

$_a$ n

e quindi:

x_1 a n

Spesso il risultato di una media è un numero non intero; in caso di grandezze misurate da numeri naturali (come persone, stanze) è più coerente arrotondare la media al numero intero più prossimo.

La media aritmetica (semplice o ponderata) è quella più utilizzata ed è un valore medio significativo se si vuole determinare un valore che esprima l'equidistribuzione del fenomeno quale, ad esempio, il reddito medio di una popolazione, la spesa media per l'alimentazione, l'altezza media di un gruppo di giovani della stessa età.

La media aritmetica si applica correttamente per determinare il valore centrale di una serie con andamento lineare e anche per avere una misura attendibile di una serie di misure di una grandezza geometrica, fisica.

Il frequente uso della media aritmetica, sia semplice sia ponderata, deriva anche dal fatto che essa gode di alcune proprietà fondamentali.

Proprietà 1

La somma degli scarti positivi dalla media aritmetica è uguale, in valore assoluto, a quella degli scarti negativi, e quindi la somma algebrica di tutti gli scarti (positivi e negativi) è uguale a zero.

Essendo $x_1, x_2, \ldots, x_n$, un insieme di dati la cui media aritmetica è M_a, definiamo lo *scarto lineare* come la differenza tra ogni valore x_i e la media M_a:

Scarto = $x_i - M_a$

con i=1, 2, …, n

La somma di tutti gli scarti sarà:

$$(x_1 - M_a) + (x_2 - M_a) + \ldots\ldots\ldots + (x_n - M_a) =$$

$$= x_1 + x_2 + x_n - n * M_a =$$

$$= x_1 + x_2 + x_n - (x_1 + x_2 + x_n) = 0$$

La proprietà si può dimostrare in modo analogo per la media aritmetica ponderata.

Da questa proprietà deriva anche che:

“La media aritmetica degli scarti (x_i – M_a) è uguale a zero.

Infatti, sia [redacted] la media aritmetica ponderata, calcoliamo la media degli scarti:

[redacted]

La proprietà ora dimostrata per la media aritmetica ponderata vale anche per la media aritmetica semplice.

Proprietà 2

La somma dei quadrati degli scarti dei valori della distribuzione dalla media aritmetica è minore della somma dei quadrati degli scarti da qualsiasi numero.

Consideriamo sempre l’insieme dei dati $x_1, x_2, \ldots, x_n$ la cui media aritmetica semplice è M_a; i quadrati degli scarti lineari sono:

$(x_1 – M_a)^2, (x_2 – M_a)^2, \ldots, (x_n – M_a)^2$

Indicando con A un qualunque numero diverso da M_a, definiamo gli scarti da tale numero:

$Scarto = x_i - A$

con i=1, 2, …, n.

La somma dei quadrati di tali scarti è:

$S = (x_1 - A)^2 + (x_2 - A)^2 + \ldots + (x_n - A)^2$

Essendo A diverso dalla media aritmetica M_a, differirà da essa di una certa quantità d, in altre parole:

$A - M_a = \pm\ d$

da cui:

$A = M_a\ \pm\ d$

Sostituendo tal espressione nella somma dei quadrati degli scarti dal numero A si ha:

[redacted]

[redacted]

[redacted]

Resta così provato che:

[redacted]

e possiamo quindi affermare che:

La somma dei quadrati degli scarti dalla media aritmetica è un valore *minimo* rispetto alla somma dei quadrati degli scarti da un qualsiasi altro numero.

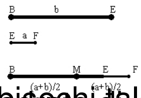
La proprietà che è stata dimostrata per la media aritmetica semplice si estende con analoga dimostrazione alla media aritmetica ponderata

Proprietà 3

Aggiungendo (o sottraendo) a tutti i valori x_i, la stessa quantità k, la media aritmetica è incrementata (o ridotta) di tale quantità (proprietà traslativa):

[redacted]

[illegible]



[illegible]

Media geometrica semplice e ponderata

La *media geometrica semplice* mantiene invariato il prodotto dei termini della distribuzione, e si ottiene dalla radice ennesima del prodotto di *n* termini:

[redacted]

Non si può calcolare se almeno uno dei termini è negativo ed è nulla se almeno uno dei termini è nullo.

Si usa di solito per mediare rapporti.

Consideriamo due valori *a* e *b,* la funzione delle intensità:

*g(a,b) = a * b*

è invariante se a ciascuna determinazione della variabile statistica si sostituisce la media geometrica M_g.

Infatti da:

*x * x = a * b*

si ha:

Abbiamo così determinato quel valore *x* che equiripartisce il fattore moltiplicativo totale tra le singole unità; in altre parole può essere sostituito a ciascuno dei valori *a* e *b* in modo che rimanga invariata l'intensità globale del carattere considerato espressa dalla:

*g(a,b) = a * b*

Ciò significa che detta media può essere usata ogni volta che si desideri rappresentare sinteticamente la distribuzione con un unico parametro, senza alterare il prodotto delle intensità

Riprendendo l'uguaglianza:

*x * x = a * b*

possiamo interpretare la media geometrica come misura del lato di un quadrato avente la stessa area a*b del rettangolo.

Questo è il *problema della quadratura di un rettangolo*, cioè della costruzione di un quadrato equivalente ad un dato rettangolo.

La Proposizione 14 del Libro II degli Elementi di Euclide ci mostra come costruire un quadrato equivalente ad una figura data a contorno rettilineo.

“Costruire un quadrato uguale ad una figura rettilinea data”

Tramite la Proposizione 45 del Libri I degli Elementi di Euclide. il poligono dato viene trasformato in un rettangolo.

Si trasforma poi questo nella differenza di due quadrati, applicando la Proposizione 5 del Libro II degli Elementi di Euclide:

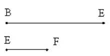
“Se una retta viene tagliata in segmenti uguali e disuguali, il rettangolo compreso tra i segmenti disuguali del tutto, assieme al quadrato costruito sulla porzione di retta che si trova tra i punti di sezione, è uguale al quadrato costruito su metà del segmento”

Poi si applica il teorema di Pitagora per trasformare in un unico quadrato la suddetta differenza di due quadrati.

E’ così che, indipendentemente dalla teoria delle proporzioni, viene risolto il problema della quadratura del poligono.

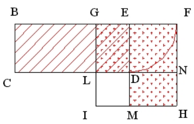
Il procedimento dimostrativo di Euclide in questa proposizione, mette in luce la possibilità di trasformare un rettangolo nella differenza di due quadrati.

Infatti siano dati i segmenti *BE* ed *EF*:

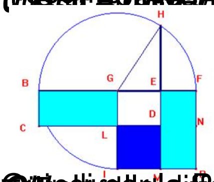


Si prolunghi *BE* di un segmento *EF*, e si costruisca su *BE* il rettangolo *BCDE* di dimensioni *BE*, *EF*
.

Si divide *BF* in due parti uguali mediante il punto *G*. e si descrive il quadrato *GFHI* di lato *GF*; per *E* si conduce la parallela a *FH* che incontra in *M* il lato *IH* e si prolunga *CD* fino ad incontrare nel punto *N* il segmento *FH.*



[illegible]



[illegible]

[redacted]

Dalla media geometrica semplice:

[redacted]

e passando ai logaritmi otteniamo:

[redacted]

analogamente dalla media geometrica ponderata:

[redacted]

passando ai logaritmi si ottiene:

[redacted]

[illegible] il reciproco della media geometrica è uguale alla media geometrica del reciproco dei valori x_i.

Questa proprietà risulta molto utile per semplificare i calcoli.

[redacted]

Media armonica semplice e ponderata

La *media armonica semplice* mantiene invariata la somma dei reciproci dei termini, essa è il reciproco della media aritmetica dei reciproci dei termini:

[redacted]

.

Si usa di solito per mediare velocità e prezzi.

Se si assume come invariante distributivo la somma dei reciproci delle intensità, ovvero:

[redacted]

la quantità *x* che può essere sostituita a ciascuna modalità senza che si alteri il valore della suddetta espressione è la media armonica, soluzione della seguente equazione:

da cui:

ab + ab = bx + ax

x(a + b) = 2ab

Il problema geometrico è di costruzione di un rettangolo di data dimensione *a+b*, equivalente ad un rettangolo di area
2ab
.

Sia *AG=a+b* un lato del rettangolo da costruire e sia *BFDG* il rettangolo noto di area *2ab*, ovvero

BF=b e *EF=a*.

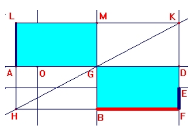
Si proluna *GD* del segmento *AG*, pari alla somma del segmento

OG=b e AO = a

e si conduce per *A* la parallela a *BG* che incontri in *H* il prolungamento di *FB*; si traccia la congiungente *GH* che incontrerà la retta passante per *EF*, essendo la somma degli angoli *BHG* e *HFE* minore di due angoli retti, nel punto *K*.

Infine si conduce per *K* la parallela a *GD* che incontra in *L* e *M* rispettivamente le rette passanti per *AH* e *BG*.

I triangoli *LHK* e *HKF*, in cui resta diviso il rettangolo *LHFK* dalla diagonale *HK*, sono equivalenti; analoga equivalenza vale per i triangoli di cui sono costituiti i rettangoli *ABGH* e *GDKM*; pertanto i rettangoli *AGML* e *BFDG*, detti complementi rispetto a *HK*, hanno la stessa area *AL* è la dimensione incognita



Se i valori x_i si manifestano con frequenza y_i abbiamo la *media armonica ponderata*:

[redacted]

La media armonica, semplice o ponderata, è eguale al reciproco della media aritmetica, semplice o ponderata, dei reciproci.

La media armonica si applica quando ha senso calcolare il reciproco dei dati; ad esempio, per determinare il potere d’acquisto medio della moneta si calcola il reciproco della media armonica dei prezzi (ricordando che si definisce potere d’acquisto la quantità di merce che si può acquistare con una data unità di moneta e che il potere d’acquisto è il reciproco del prezzo della merce). La media armonica si applica anche per conoscere la velocità media come media armonica della velocità, poiché il reciproco di una velocità rappresenta il tempo necessario a percorrere l’unità di spazio.

Media quadratica

La *media quadratica semplice* è la radice quadrata della media aritmetica dei quadrati dei termini:

[redacted]

.

Essa mantiene invariata la somma dei quadrati dei termini, è soprattutto usata per mediare gli scarti di una media aritmetica semplice.

Se si assume come invariante distributivo la somma dei quadrati delle intensità, espressa da:

$g(a,b) = a^2 + b^2$

la quantità x che può essere sostituita a ciascuna modalità, senza che si alteri il valore della $g(a,b) = a^2 + b^2$

è la soluzione dell'equazione:

$x^2 + x^2 = a^2 + b^2$

da cui:

Il valore x è denominato media quadratica semplice, M_2 quest'ultima rappresenta e sostituisce la variabile statistica considerata ai fini della valutazione sintetica dell'espressione $g(a,b) = a^2 + b$

2
assunta come invariante.

Il problema geometrico è di

- somma di due quadrati
- duplicazione del quadrato.

Per effettuare l'interpretazione geometrica di questa media bisogna prendiamo la proposizione di Bombelli:

"Fare di due quadrati uno solo". [1]

Consideriamo i due quadrati costruiti sui segmenti consecutivi *BE* e *EC* di lunghezza rispettivamente pari ad a e b, dei quali se ne vuole fare un terzo equivalente in superficie.

Si traccia il segmento *BF* e si riporta tale segmento su *BC* così da avere *BD = BF*.

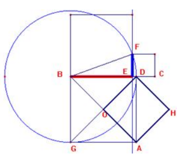
Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo *BEF*, i cui cateti sono pari ad a e b, otteniamo il quadrato *BDGA* di area $a^2 + b^2$.

Tale area è equivalente al doppio dell'area del quadrato incognito. Preso il quadrato *BDFG* di area $2x^2$, si tracciano le diagonali *AB* e *DG* e si conducono per i punti, *D* e *A*, le parallele rispettivamente a *AB* e *GD*.

L'area del quadrato *ODHA* è pertanto pari a x^2, e la lunghezza del lato di tale quadrato è la misura della media quadratica.

Notiamo che la diagonale del quadrato di lato *x* è ovvero il lato del quadrato *BDFG*, come risulta risolvendo algebricamente la

$g(a,b) = a^2 + b^2$



Se i valori x_i si presentano con frequenza y_i allora abbiamo la *media quadratica ponderata:*

La media quadratica (semplice o ponderata) è eguale alla radice quadrata della media aritmetica (semplice o ponderata) dei quadrati dei valori dei dati.

Fra le medie considerate, la media quadratica è quella che ha valore maggiore ed è la più influenzata dai valori molto piccoli o molto grandi della distribuzione; la media quadratica è perciò utilizzata per mettere in evidenza l'esistenza di valori che si scostano molto dai valori centrali. Si usa inoltre la media quadratica quando si ha interesse a calcolare un valore medio di superficie disponibile.

Fra le quattro medie di calcolo esaminate, sussiste la seguente relazione:

Vale il segno di eguale solo nel caso in cui i dati siano tutti eguali fra loro e quindi eguali a qualsiasi media.

---

[1] R. Bombelli, *L'Algebra, F*eltrinelli