Ricerche recenti hanno rivelato che i matematici Assiro-Babilonesi (XXIII sec. a.C. circa) sapevano risolvere particolari tipi di equazioni di secondo grado, che essi ottenevano risolvendo dei problemi geometrici, infatti nei numerosi testi babilonesi si trovano risolti dei problemi la cui traduzione algebrica è una equazione di secondo grado.

Numerosi secoli dopo, i matematici della Scuola Pitagorica (sec. V a.C.) determinarono una risoluzione geometrica delle equazioni di secondo grado, risoluzione riportata nel Libro VI degli *Elementi* di Euclide (sec. III a.C.). Però si trattava solo d'equazioni che, essendo l'espressione di problemi geometrici, avevano solo le soluzioni positive.

Anche presso gli arabi Mohammed ibn Musa Khowarizmi (sec. IX) ed Omar (sec. XI), troviamo, con le stesse limitazioni, la risoluzione geometrica dell'equazione di secondo grado.

Diofanto (sec. III) risolse numericamente l'equazione di secondo grado (scartando però le radici irrazionali), ma il suo metodo deriva direttamente dall'algebra assiro babilonese.

Il procedimento algebrico generale di risoluzione, si trova nelle opere degli indiani Aryabhta (sec. V), Brahmagupta (sec. VII) e Bhascara (sec. XII), che considerano anche le radici irrazionali e rivelano pure che l'equazione di secondo grado può non avere alcuna radice reale od averne due.

Questi risultati furono diffusi in Europa da Leonardo Fibonacci (1170-1240) con il *Liber Abbaci* e da Luca Pacioli con la *Summa de Aritmetica Geometrica Proporzioni et Proportionalita.*

Fino al secolo XVI si scartarono però le radici negative ed anche quando erano entrambe positive, il fatto che l'equazione poteva avere due radici parve così strano che si teneva conto di una sola di esse [1] .

Ogni equazione di secondo grado ad una incognita, ridotta alla forma più semplice con tutti i termini portati a primo membro ed ordinati secondo le potenze decrescenti dell'incognita, assume la *forma* detta *normale* o *tipica*:

$Ax^2 + Bx + C = 0$

dove , *B* e *C* sono i coefficienti e possono assumere qualsiasi valore (numeri o espressione letterale) e *x* è l'incognita. *A* si dice *primo coefficiente* o *coefficiente del termine di secondo grado* , *B* si dice *secondo coefficiente* o *coefficiente del termine di primo grado* e *C* si dice *terzo coefficiente* o *termine noto.*

Il coefficiente *A* non può mai essere uguale a zero, altrimenti, se fosse zero, il termine di secondo grado si annullerebbe e quindi l'equazione sarebbe di primo grado.

I coefficienti *B* e *C*, invece, possono essere uguali a zero, uno solo od entrambi, ed in tal caso l'equazione, in cui mancano quindi uno o due termini, dicesi *incompleta*.

Abbiamo quattro casi:

1.

e $B = 0$ e [redacted]

l'equazione $Ax^2 + Bx + C = 0$ diventa:

$$Ax^2 + C = 0$$

e viene detta *equazione pura*.

Le sue radici sono:

[redacted]

- Se *A* e *C* sono numeri reali discordi allora:

[redacted]

le radici sono reali ed opposte, quindi esistono due numeri reali opposti che sono le soluzioni dell'equazione.

- Se *A* e *C* sono numeri reali concordi, allora

[redacted]

e poiché non esiste la sua radice quadrata nell'insieme dei numeri reali, l'*equazione* risulta *impossibile* nel campo reale, ma presenta due radici immaginarie nel campo complesso.

2. [redacted] e $C = 0$ l'equazione $Ax^2 + Bx + C = 0$ diventa:

$Ax^2 + Bx = 0$

e viene detta *equazione spura*.

Raccogliendo nel primo membro l'incognita a fattore comune, si ha:

$x\,(Ax + B) = 0$

e per la legge dell'annullamento del prodotto otteniamo due equazioni di primo grado, le cui radici sono le radici dell'equazione data:

$x_1 = 0$

[redacted]

Nell'equazione spuria una radice è sempre zero e l'altra è sempre reale.

3. [redacted] e $B = 0$ e $C = 0$ l'equazione $Ax^2 + Bx + C = 0$ diventa:

$Ax^2 = 0$

e prende il nome di *equazione monomia*.

Entrambe le radici sono zero, cioè la radice zero è una radice doppia dell'equazione.

4 le [redacted] le soluzioni sono date dalla formula:

[redacted]

detta *formula completa.*

- Se *B* è pari ed [redacted] si può utilizzare, per la ricerca delle soluzioni, la *formula ridotta*:

[redacted]

- Se *B* è pari ed *A=1* si può utilizzare, per la ricerca delle soluzioni, la *formula ridottissima:*

[redacted]

Consideriamo l'equazione completa:

$Ax^2 + Bx + C = 0$

, cerchiamo di scoprire un procedimento che ci consente di calcolarne le soluzioni.

Bombelli nella sua *Algebra* afferma:

"Havendosi da agguagliare potenze a tanti e numero partasi il tutto per la quantità delle potenze, poi si pigli il mezzo delli Tanti e si quadri ed il produtto si aggionge al numero, e della somma se ne piglia il lato et a detto lato si aggionge il mezzo delli Tanti, et la somma è la valuta del Tanto...".

L'idea sottostante il procedimento di risoluzione algebrica dell'equazione di secondo grado, suggerito da Bombelli, è la trasformazione dell'equazione data in un'altra equivalente, il cui primo membro sia il quadrato di un binomio di primo grado nell'incognita x (*"modo di trovare il lato per poter agguagliare le quantità"*
).

In altre parole il Bombelli insegna ad aggiungere o togliere ad un trinomio di secondo grado una quantità opportuna, in modo da trasformarlo in un quadrato perfetto affinché sia possibile passare da equazioni di secondo grado ad un'equazione lineare.

Trasformiamola successivamente in altre equivalenti in cui il primo membro sia un quadrato d'una espressione contenente l'incognita ed il secondo membro sia noto.

A tale scopo moltiplichiamo ambedue i membri per $4A$:

$4A^2x^2 + 4ABx + 4AC = 0$

Aggiungiamo B^2 ad ambo i membri:

$4A^2x^2 + 4ABx + 4AC + B^2 = B^2$

Trasportiamo il termine $4AC$ al secondo membro:

$4A^2x^2 + 4ABx + B^2 = B^2 - 4AC$

e quindi:

$(2Ax + B)^2 = B^2 – 4AC$

L’equazione ottenuta è equivalente alla data e rispetto all’incognita $2Ax+B$ è pura.

Chiamiamo *discriminante* dell’equazione $Ax^2 + Bx + C = 0$ la quantità:

dallo studio del suo segno possiamo conoscere il tipo di soluzioni.

Esaminiamo i seguenti casi:

1.

Si ha

abbiamo e per le ipotesi fatte le due soluzioni sono reali e distinte;

2.

Si ha:

$(2Ax + B)^2 = 0$

$(2Ax + B) = 0$

[redacted] [illegible]

Relazione tra i coefficienti e le radici di un'equazione di secondo grado.

Fra le radici di una equazione di secondo grado e i suoi coefficienti intercorrono due relazioni importanti.

- La somma delle radici di una equazione di secondo grado è uguale all'opposto del quoziente del secondo coefficiente per il primo, cioè:

[redacted]

- Il prodotto delle radici di un'equazione di secondo grado è uguale al quoziente del terzo coefficiente per il primo, cioè

[redacted]
.

Da $Ax^2 + Bx + C = 0$ dividendi per [redacted] si ottiene:

[redacted]

ovvero l'equazione avente per radici due numeri assegnati ha il primo coefficiente uguale ad uno, il secondo coefficiente uguale alla somma dei due numeri dati cambiato di segno e il terzo coefficiente uguale al prodotto dei due numeri:

$x^2 - sx + p = 0.$

Viceversa per determinare due numeri, noti la loro somma e il loro prodotto, si scrive un’equazione di secondo grado avente il primo coefficiente uguale ad uno, il secondo coefficiente uguale alla somma cambiata di segno e il terzo coefficiente uguale al prodotto. Le radici dell’equazione sono i numeri richiesti.

Scomposizione di un trinomio di secondo grado in fattori.

Osserviamo che conoscendo le soluzioni dell’equazione di secondo grado $Ax^2+Bx+C=0$ possiamo effettuare la scomposizione di un trinomio di secondo grado in fattori:

$Ax^2 + Bx + C = (x - x_1)(x - x_2)$

Dato un trinomio di secondo grado nella variabile *x*:

$Ax^2 + Bx + C$

si chiamano *radici* o *zeri del trinomio,* le radici, nel campo dei numeri reali dell’equazione che si ottiene uguagliando a zero il trinomio.

Se Il trinomio avrà due zeri distinti o coincidenti.

Indicando con x_1 e x_2 questi zeri sarà:

Teorema di Cartesio.

Il teorema di Cartesio permette di determinare i segni delle radici d’una equazione di secondo grado, nel caso che queste siano reali, senza risolvere l’equazione, ma deducendo tali segni dai segni dei coefficienti dell’equazione.

Prima di esporre il teorema diamo due definizioni:

Si dice che due coefficienti consecutivi dell’equazione di secondo grado, ridotta a forma normale, presentano una *permanenza* di segno se essi hanno lo stesso segno; si dice, invece, che presentano una *variazione* se hanno segno contrario.

Ciò premesso esponiamo il *teorema di Cartesio*:

Un’equazione di secondo grado (completa e ridotta a forma normale), avente radici nell’insieme R (cioè con D³=0) ha tante radici positive quante sono le variazioni presentate dai suoi coefficienti e tante radici negative quante sono le permanenze; e se le radici sono una positiva e l’altra negativa, ha maggior valore assoluto quella positiva se la variazione precede la permanenza ed ha invece maggiore valore assoluto quella negativa se è la permanenza che precede la variazione.

Data l’equazione:

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

che abbia radici in R ed il cui primo coefficiente si può supporre sempre positivo (perché se non lo fosse lo si renderebbe tale cambiando segno a tutti i termini dell’equazione), dimostriamo il teorema enunciato esaminando separatamente ciascuno dei quattro casi che si possono presentare.

Primo caso

Sia *A* positivo, *B* negativo e *C* positivo e quindi si abbiano due variazioni.

L'equazione ha due radici positive.

Infatti, dalla relazione:

[redacted]

essendo *C* e *A* positivi, si deduce che il prodotto delle radici è positivo e che quindi le due radici debbono essere concordi.

Inoltre, dalla relazione:

[redacted]

essendo *B* ed *A* discordi, si deduce che la somma delle radici è positiva.

Dunque le radici debbono essere concordi ed avere somma positiva; se ne deduce che esse sono entrambe positive.

Secondo caso

I coefficienti *A*, *B* e *C* siano tutti e tre positivi e quindi si abbiano due permanenze.

L'equazione ha due radici negative.

Infatti, in questo caso il prodotto delle radici:

[redacted]

è positivo e quindi le radici debbono essere concordi; inoltre la loro somma:

[redacted]

è negativa.

Dunque le radici debbono essere concordi ed avere somma negativa; se ne deduce che esse sono entrambe negative.

Terzo caso

Sia *A* positivo, *B* negativo e *C* negativo e quindi si abbia prima una variazione e poi una permanenza.

L’equazione ha una radice positiva ed una radice negativa ed ha maggiore valore assoluto quella positiva.

Infatti, il prodotto delle due radici:

[redacted]

è negativo e quindi le due radici debbono essere discordi; inoltre la loro somma:

[redacted]

è positiva.

Dunque le radici debbono essere discordi ed inoltre avere somma positiva; se ne deduce, quindi, che deve avere maggiore valore assoluto quella positiva.

Quarto caso

Sia *A* positivo, *B* positivo e *C* negativo e quindi si abbia prima una permanenza e poi una variazione.

L'equazione ha una radice negativa ed una positiva ed ha maggiore valore quella negativa.

Infatti, il prodotto delle radici:

[redacted]

risulta negativo e quindi le due radici debbono essere discordi; inoltre la loro somma:

[redacted]

è negativa e da ciò si deduce che deve essere maggiore in valore assoluto quella negativa [3] .

Tutta la dimostrazione del teorema di Cartesio può essere riassunta nel seguente prospetto:

A

B

C

x_1

X 2

Primo caso

+

-

+

+

+

+

+

Secondo caso

+

+

+

+

-

-

-

Terzo caso

+

-

-

-

+

+

-

|x 2 |>|x 1 |

Quarto caso

+

+

-

-

-

-

+

$|x_1| > |x_2|$

Nello studio delle equazioni, Bombelli non possiede un'equazione generale per la risoluzione di equazioni di ogni grado, egli procede in modo sistematico, risolvendo tante equazioni particolari quante sono quelle cui i mutamenti di segno dei coefficienti possono dar luogo.

Risoluzione geometrica delle equazioni di secondo grado.

Nella sua *Algebra* la risoluzione delle equazioni di secondo grado vengono affrontate nel capitolo:

"potenze eguali a tanti e numero"

dove viene fatta una dimostrazione geometrica.

La risoluzione geometrica delle equazioni è fatta dal Bombelli con procedimento analitico; egli rappresenta con un segmento arbitrariamente scelto l'incognita dell'equazione (o una potenza dell'incognita) ed esegue su questo e sui segmenti che figurano come coefficienti le operazioni indicate dall'equazione, ne risulta così una relazione fra figure geometriche che permette di costruire il segmento incognito. Rappresentando le quantità note con segmenti e questi con lettere dell'alfabeto, le equazioni che scrive il Bombelli assumono forma letterale. Il suo procedimento è l'inverso di quel che segue l'algebra geometrica degli antichi; egli infatti non risolve direttamente il problema geometrico, per ricavare la risoluzione analitica dall'interpretazione aritmetica della costruzione eseguita, ma si vale della risoluzione algebrica da lui svolta, per ricavarne la costruzione geometrica; ed invece di considerare la costruzione geometrica come procedimento necessario alla giustificazione della validità dei risultati ottenuti per via analitica, fa consistere la dimostrazione della costruzione geometrica nella corretta interpretazione delle deduzioni logiche ottenute con la *Regola d'Algebra*.

La risoluzione geometrica delle equazioni è fatta dal Bombelli con procedimento analitico; egli rappresenta con un segmento arbitrariamente scelto l'incognita dell'equazione (*il tanto*) ed esegue su questo e sui segmenti che figurano come coefficienti le operazioni indicate dall'equazione; ne risulta così una relazione tra figure geometriche che permette di costruire il segmento incognito.

Il suo procedimento è l'inverso di quel che segue l'algebra geometrica degli antichi; egli infatti non risolve direttamente il problema geometrico per ricavare la soluzione analitica dalla interpretazione aritmetica della costruzione eseguita, ma si avvale della risoluzione per ricavarne la costruzione geometrica; ed invece di considerare la costruzione geometrica come procedimento necessario alla giustificazione della validità dei risultati ottenuti per via analitica, fa consistere la dimostrazione della costruzione geometrica nella corretta interpretazione delle deduzioni logiche ottenute con la regola d'algebra (la dimostrazione nasce dalla sua operatività algebrica).

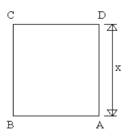
Il caso geometrico corrispondente alla suddetta equazione di secondo grado è l'uguaglianza tra l'area di un quadrato (x^2) e la somma delle area di un rettangolo (bx) e di una superficie nota c (comunque riconducibile ad un quadrato).

Nota la superficie ORST e il segmento EF di lunghezza pari a b, si determini la lunghezza del segmento AB

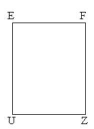
Alla luce del percorso algebrico appena descritto, ne deriva il corrispondente percorso geometrico.

Consideriamo le seguenti figure:

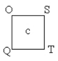
il quadrato ABCD di lato *x* incognito



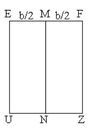
il rettangolo EFUZ di area *bx*, ovvero di lati EU=*x* e EF=*b*



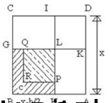
il quadrato QOST di area pari a *c*



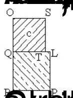
Si bisechi il segmento EF in M, cosicché EM=MF=*b/2*,



e si costruiscano i rettangoli CDGK e ADIH



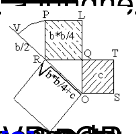
... differenza dei quadrati BGLH e LPRQ



... OSQT+LPRQ

[redacted]eguentemente:

[redacted]hezza del segmento OV sarà il valore dell'incognita,



... Elementi di informatica, ...