L*'equazione di terzo grado,* o *cubica*, a una incognita è un'equazione del tipo:

$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$

Agli inizi del '500 non si era ancora giunti alla soluzione dell'equazione di terzo grado.

La risoluzione delle equazioni di terzo grado aveva appassionato i matematici di tutti i tempi, poiché era frequente imbattersi in problemi di grado superiore al secondo.

Non conosciamo nessun documento da cui risulti che gli Egizi sapessero risolvere equazioni cubiche.

I matematici Assiro Babilonesi avevano sviluppato una vera e propria algebra che permetteva loro di risolvere problemi che noi oggi risolviamo per mezzo di equazioni e sistemi di equazioni dei primi tre gradi.

Nelle opere di Archimede (sec. III a.C.) e di Diofanto (sec. III d.C.), di matematici arabi, dell'indiano Bhascara (Braskara) (c. 1150) e del matematico cinese Chi'n Chiu-Shao (1257) si ha qualche esempio di risoluzione geometrica di particolari equazioni di terzo grado [1] .

Ritroviamo i metodi risolutivi utilizzati da Archimede nell'opera del matematico arabo Almâhâni (c. 860) e successivamente Abû Ja'far al-Khârin (c.960) e Alhazen (c.1000) affrontarono lo stesso problema con metodi simili a quelli utilizzati da Archimede.

Nel secolo XI, il poeta e matematico Omar Ibrahim al Khayami (Omar Khayyam) scrisse un'algebra che includeva problemi di equazioni di terzo grado. Nella sua opera *Algebra* egli elabora un metodo generale per riconoscere quando le equazioni di terzo grado hanno radici positive, dando poi una classificazione di queste equazioni in tredici casi, egli tratta tutti questi casi in quanto non considera i coefficienti negativi. Ritenendo che le equazioni cubiche non si potessero risolvere algebricamente, Omar dava solo soluzioni geometriche, ricorrendo alle intersezioni di due coniche, come avevano già fatto Menecmo e anche Archimede.

Per quanto riguarda la soluzione algebrica delle equazioni cubiche, visti gli insuccessi, gli algebristi concludevano che il caso era impossibile oppure procedevano per tentativi.

In una notevole opera astronomica del matematico persiano Al-Biruni vengono affrontati problemi che si riconducono a equazioni di terzo grado. Al-Biruni dava la soluzione di questi problemi senza alcuna spiegazione questo fa pensare che procedimenti generali per la risoluzione di tutte le equazioni cubiche fossero di uso corrente nel mondo matematico mussulmano. Precisiamo tuttavia che non ci sono documenti a suffragio di questa ipotesi.

Leonardo Pisano (1170 circa-1240), più noto come Fibonacci, nella sua opera *Flos* (c. 1225), tentò di risolvere l'equazioni di terzo grado:

$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$

che gli era stata proposta da un astronomo di Federico II.

Fibonacci pervenne al sorprendente valore approssimato:

$x = 1,3688081$

Notiamo che la soluzione ottenuta da Fibonacci è esatta fino alla decima cifra decimale. Essa rappresenta l'approssimazione più accurata di una radice irrazionale di una equazione algebrica che fosse mai stata raggiunta in Europa fino a quella data, e che rimase tale per oltre trecento anni.

Nel 1500 cominciarono a circolare voci sui progressi della matematica in campo algebrico, tanto è vero che nel 1530 Zuanne de Tonini da Coi inviò a Tartaglia due problemi che si risolvevano con equazioni di terzo grado.

Vi fu una grande polemica riguardo la lettera di Tartaglia in risposta a Zuanne, riportata nel Quesito XIII:

"… et dico che vi dovreste alquanto arossire, a proponere da rissolvere ad altri, quello che voi medesimo non sapeti rissolvere…".

La storia del rinvenimento della formula risolutiva dell'equazione di terzo grado si sviluppa nella prima metà del 1500.

Sono coinvolti personaggi tutti italiani: Scipione dal Ferro, il suo allievo Antonio Maria Fiore, Niccolò Fontana, detto Tartaglia, e Girolamo Cardano.

La difficoltà storica di attribuire la paternità di una formula è legata alle motivazioni socio-economiche che spingono questi matematici verso la ricerca scientifica.

Da un lato c'è l'urgenza di scoprire le leggi della balistica, dall'altro la bravura di un matematico si misura con sfide pubbliche, delle vere e proprie gare di matematica.

In entrambi i casi, la scoperta di una formula che permettesse di risolvere i problemi allora in voga era un segreto da custodire gelosamente.

Tartaglia incomincia ad affrontare l’argomento e molto probabilmente viene a conoscenza delle ricerche e dei progressi conseguiti dal matematico Scipione dal Ferro (1465-1526).

Il 22 febbraio 1535 si tiene una sfida tra Tartaglia e Antonio Maria Fiore, discepolo di dal Ferro: ciascuno propone all’altro trenta problemi da risolvere nel più breve tempo possibile.

Tartaglia risolvette i trenta problemi proposti dall’avversario nel termine di due ore in quanto tutti i problemi:

“… conducevano l’operatore in el capitolo de cosa e cubo equal a numero…”

Mentre Antonio Maria Fiore non riesce a risolverne nessuno.

Tutti i problemi si risolvevano per mezzo di equazioni di terzo grado; quelli proposti da Fiore potevano essere ricondotti tutti ad un unico tipo d’equazione di terzo grado, la cui formula risolutiva gli era stata rivelata dal suo maestro Scipione dal Ferro.

La schiacciante vittoria di Tartaglia dimostrava che questi aveva trovato un metodo per risolvere tutte le equazioni di terzo grado.

La notizia giunge a Cardano, medico, scienziato e astrologo dalla fama internazionale. Cardano cerca di convincere Tartaglia a rivelargli la formula. Dopo numerose insistenze Tartaglia cede richiedendo che la formula restasse segreta.

Proprio in questo periodo comincia a svilupparsi il simbolismo matematico del calcolo letterale. I matematici arabi, da cui gli italiani avevano appreso il calcolo algebrico e i metodi per risolvere le equazioni, usavano un linguaggio geometrico, in parte in uso ancora oggi: il cubo, il quadrato, il lato.

Per esempio l'equazione:

$x^3 + 6x = 20$

veniva scritta *"il cubo e sei volte il lato è uguale a venti"*.

Tartaglia invia a Cardano i seguenti versi:

Quando che 'l cubo con le cose appresso: ***x^3+px***

Se agguaglia a qualche numero discreto: ***= q***

Trovami dui altri, differenti in esso ***u-v = q***

Dapoi terrai, questo per consueto

Che 'l loro produtto, sempre sia eguale ***u·v =***

Al terzo cubo delle cose netto; ***$(p/3)^3$***

El residuo poi suo generale,

Delli lor lati cubi, ben sottratti ***radcub(u) - radcub(v)***

Varrà la tua cosa principale. ***= x***

In el secondo, de cotesti atti;

Quando che 'l cubo, restasse lui solo,

Tu osserverai quest'altri contratti,

Del numer farai due tal part' a volo,

Che l' una, in l' altra, si produca schietto,

El terzo cubo delle cose in stolo;

Delle quali poi, per commun precetto

Terrai li lati cubi, insieme gionti

El cotal somma, sarà il tuo concetto;

El terzo, poi de questi nostri conti

Se solve col secondo, se ben guardi

Che per natura son quasi congionti,

Questi trovai, et non con passi tardi

Nel mille cinquecent' e quattro e trenta;

Con fondamenti ben saldi, e gagliardi;

Nella Città del mar 'intorno centa.

Zuanne de Tonini da Coi e Cardano, cercarono di carpire la scoperta di Tartaglia. Alla fine Cardano ci riuscì, con il giuramento però che non avrebbe mai pubblicato i risultati di Niccolò.

Nel 1545, contravvenendo alla promessa verso Tartaglia, Cardano pubblica nell'*Ars magna* la formula risolutiva delle equazioni di terzo grado. Invece di trattare la formula generale con il complesso linguaggio che ne sarebbe derivato, Cardano affronta un caso particolare, un esempio, sottintendendo che il metodo si può applicare a qualsiasi caso.

Dopo aver consultato i vari documenti (tra cui i più preziosi quelli ritrovati da Ettore Bartolotti nelle Biblioteche di Bologna negli anni venti) oggi si può affermare che gli autori della formula risolutiva delle equazioni cubiche sono: Scipione dal Ferro, Niccolò Fontana detto Tartaglia e Girolamo Cardano.

Ognuno di essi ha contribuito diversamente alla risoluzione del problema.

Di Scipione dal Ferro, nato a Bologna il 6 febbraio 1465 e lettore di Aritmetica e Geometria presso l'Università di questa stessa città dal 1496 al 1525, anno precedente la sua morte, non abbiamo alcuno scritto relativo alla risoluzione dell'equazione di terzo grado; tuttavia egli ne è indicato come uno degli autori da Girolamo Cardano nella prima pagina dell'*Ars Magna*, pubblicata a Norinberga nel 1545 e che è il primo trattato in cui viene resa pubblica detta risoluzione. Inoltre, in un manoscritto ritrovato dal Bartolotti nella Biblioteca Universitaria di Bologna dal titolo *Regole principali dell'arte maggiore*, detta *Regola della Cosa ovver d'Algibra*, che pare si riferisca alle lezioni tenute da *Pompeo Bolognetti*:

"lui l'hebbe da Messer Sipion dal Ferro, vecchio Bolognese"

una chiara esposizione della regola.

Nonostante i documenti sopra citati a sostegno dell'autenticità della scoperta di Dal Ferro, rimanevano negli studiosi della storia della matematica ancora alcuni dubbi, dovuti al fatto che nell'*Algebra* di Rafael Bombelli, pubblicata a Bologna nel 1572, non si trova menzione di Scipione dal Ferro.

Anche questa ultima obiezione è stata rimossa; infatti Bartolotti ha ritrovato nella Biblioteca Comunale dell'Archiginnasio di Bologna il manoscritto originale dell'opera suddetta ed in esso Scipione dal Ferro è citato in almeno cinque punti.

Per quanto riguarda il contributo di Tartaglia, nato a Brescia intorno al 1500 e morto a Venezia nel 1559, egli è sicuramente l'autore di uno dei fondamentali principi della teoria delle equazioni algebriche.

Mentre Cardano, nato a Pavia il 24 settembre 1501 e morto a Roma nel settembre del 1576, fece una completa analisi di tutti i casi che si presentano nella risoluzione dell'equazione cubica; studiò le trasformazioni che permettono di ridurre un'equazione algebrica in un'altra di più facile soluzione e tra queste quella che riduce l'equazione cubica generale a quella mancante del termine di secondo grado.

Si deve sempre a Cardano l'osservazione che l'equazione cubica ha tre radici e la scoperta del caso irriducibile.

Dal Ferro aveva trovato la regola generale per la risoluzione delle equazioni di terzo grado, mancanti del termine quadratico, presumibilmente intorno al 1515 ed era morto senza divulgarla.

Questo fatto era perfettamente aderente al costume dell'epoca. Colui che trovava una regola generale di solito non la rendeva pubblica, ma si serviva di essa, senza renderlo palese, per risolvere i più svariati problemi numerici che ad essa si riconducevano, ricavandone così maggior gloria.

Esaminiamo ora i diversi casi che si presentano circa la realtà delle radici dell'equazione cubica.

- Se [redacted] i due radicali cubici della formula ammettono ciascuno un valore e due valori immaginari, per cui la formula dà nove valori per la *x*.
- Se [redacted] in questo caso i due radicali cubici risultano uguali.
- Se [redacted] sotto i radicali cubici compaiono numeri immaginari coniugati complessi, ma le tre radici sono ancora tutte reali.

Cardano si accorse di questo inconveniente della formula di Tartaglia, il caso era chiamato *irrid ucibile*
, ma non riuscì a superare l'ostacolo, perché non erano ancora stati presi in considerazione i numeri immaginari.

Cardano, già nell'*Ars Magna* aveva fatto menzione del caso irriducibile, notando che in questa situazione si può ancora applicare la regola, ma si ottengono soluzioni, che egli chiama *sofistiche*
, riprendendo poi la questione in
Regula Aliza Libellus
, edito a Basilea nel 1570. In quest'opera egli esamina alcuni artifici per giungere alle soluzioni reali nel caso irriducibile senza passare attraverso le radici sofistiche.

Questo problema stimolò, negli anni successivi, numerose ricerche in campo algebrico che portarono con Rafael Bombelli all'introduzione dei numeri immaginari.

Il merito di avere completamente analizzato e risolto il caso irriducibile è del matematico bolognese Rafael Bombelli. Le sue ricerche sono esposte nel trattato *L'Algebra* scritto verso il 1560 e pubblicato nel 1572, in cui sono inoltre raccolti e coordinati tutti i contributi dati dai matematici della Scuola Bolognese della prima metà del secolo XVI.

Per meglio comprendere come Bombelli sia giunto alla trattazione del caso irriducibile è utile ricordare come egli, nel primo libro dell'*Algebra*, analizzi dettagliatamente la struttura di un corpo aritmetico contenente irrazionalità quadratiche e cubiche, osservando che l'aggiunta di irrazionali quadratici è sufficiente per risolvere le equazioni di secondo grado, mentre l'aggiunta di irrazionali cubici serve per risolvere le equazioni di terzo grado.

Tuttavia Bombelli osservò che nel caso delle equazioni cubiche bisognava aggiungere anche delle particolari irrazionalità cubiche che si presentavano nel caso irriducibile. Poiché non esistevano numeri reali in grado di rappresentare la radice quadrata di numeri negativi, Bombelli riconobbe la necessità di aggiungere nuovi *numeri*, che furono detti *immaginari*, adatti a rappresentare tali radici. Bombelli indicò tali numeri con simboli della forma
ap.d.m.b
(
a
più di meno

b
) e
am.d.m.b
(
a
meno di meno
b
) corrispondenti alla forma moderna
a+ib
,
a-ib
, ne stabilì le leggi formali di calcolo e ne diede varie applicazioni.

Bombelli nel suo Trattato di Algebra, contenente molti degli esercizi già presenti nell'*Ars Magna* di Cardano, inventa le dizioni:
più di meno
(p.d.m.) per indicare

Metodo utilizzato da Tartaglia per la risoluzione delle equazioni di terzo grado

Anche oggi, per dimostrare la formula risolvente della equazione di terzo grado si procede come ha fatto Tartaglia nel secolo XVI.

Considieriamo l'equazione di terzo grado:

$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$

o meglio ancora:

$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$

per giungere alla soluzione per prima cosa eliminiamo il termine x^2 , effettuiamo la sostituzione:

[redacted]

otteniamo:

[redacted]

Dopo aver sviluppato e semplificato, si perviene all'equazione:

$w^3 + Pw - Q = 0$

dove si è posto:

[redacted]

Consideriamo delle variabili ausiliarie, cioè siano *u* e *v* due variabili tali che:

$u\text{-}v=w$ e $3uv=P$

Sostituendo nell'equazione:

$w^3 + Pw - Q = 0$

otteniamo:

$(u - v)^3 + P\ (u - v)\ \ Q = 0$

Sviluppando e tenendo conto della posizioni precedenti otteniamo:

$u^3 - v^3 - Q = 0$

Da *3uv=P* si ha:

[redacted]

e quindi, sostituendo, otteniamo la seguente equazione:

[redacted]

che risolviamo rispetto a u^3 e otteniamo:

[redacted]

con :

[redacted]

Dalla $u^3 - v^3 - Q = 0$ si ottiene:

$v^3 = u^3 - Q$

Sostituendo il valore trovato di u^3 e semplificando otteniamo:

[redacted]

Estraendo la radice cubica nelle:

[redacted]

[redacted]

e dopo aver osservato che le quattro soluzioni ottenute sono a due a due uguali otteniamo le soluzioni:

[redacted]
[redacted]

Ora per concludere sostituiamo in:

$w = u - v$

otteniamo la soluzione:

[redacted]

che unita a:

[redacted]

ci fornisce la soluzione dell'equazione richiesta.

Metodo utilizzato da Scipione dal Ferro per la risoluzione delle equazioni di terzo grado

Consideriamo:

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + …….. + a_{n-1}x + a_n = 0$

come equazione razionale intera di grado n^32, a coefficienti reali (o anche complessi).

Se effettuiamo su essa la trasformazione a radici incrementate del tipo:

$x=y+k$

notiamo che tutte le derivate di $f(x)$ di ordine maggiore di n sono nulle. Pertanto in virtù della formula di Taylor possiamo scrivere:

[redacted]

Poiché stiamo considerando le equazioni di terzo grado del tipo:

$f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$

abbiamo:

[redacted]

per cui:

$f(k) = a_0k^3 + a_1k^2 + a_2k + a_3$

$f'(k) = 3a_0k^2 + 2a_1k + a_2$

$f''(k) = 6a_0k + 2a_1$

$f'''(k) = 6\, a_0$

Pertanto:

[redacted]

[redacted]

generalizzando si ha:

[redacted]

[redacted]

Imponendo:

$na_0k + a_1 = 0$

si ha:

[redacted]

l'equazione trasformata viene ad essere privata del termine di grado *n-1*.

Questa forma alla quale è sempre possibile ricondurre una qualunque equazione algebrica viene detta *forma ridotta*.

Di conseguenza per risolvere un'equazione di terzo grado della forma:

$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$

basta applicare ad essa la trasformazione:

[redacted]

Otteniamo:

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

Posto allora:

[redacted]

l'equazione si riduce alla forma ridotta:

$x^3+py+q=0$

e ripristinando per comodità la primitiva variabile x abbiamo:

$x^3+px+q=0$

con p funzione di A, B, C e q funzione di A, B, C, D.

Seguendo il metodo suggerito da Scipione dal Ferro poniamo:

$x=u+v$

da cui:

$x^3=(u+v)^3=(u^3+v^3)+3uv(u+v)$

$x^3-3uvx-(u^3+v^3)=0$

confrontando questa equazione con la

$x^3+px+q=0$

otteniamo:

$-q=u^3+v^3$ $p=-3uv$

da cui si ottiene il sistema:

Pertanto le quantità u^3 e v^3 sono le radici dell'equazione di secondo grado:

[redacted]

da cui:

[redacted]

[redacted]

e pertanto:

[redacted]

[redacted]

ed infine:

[redacted]

Discussione della formula risolutiva delle equazioni di terzo grado

Nel campo dei numeri complessi C esistono tre radici cubiche (di cui due sempre complesse) di un qualunque numero *z*, le quali si ottengono da una qualunque di esse, moltiplicandola per due radici cubiche complesse dell’unità, cioè abbiamo:

[redacted] [redacted]

avremo quindi:

[redacted]

ue□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□ $e\varepsilon^2$

[redacted]

ve□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□ $e\varepsilon^2$

Allora per poter ottenere le tre radici dell’equazione di terzo grado denotiamo con *u* una qualunque delle tre radici cubiche di:

[redacted]

dove possiamo porre:

[redacted]

ed associamo ad essa il valore:

dopo di che le tre radici dell'equazione di terzo grado saranno:

$x_1=u+v$ $x_2=ue_1+ve_2$ $x_3=ue_2+ve_1$

perché in ogni caso si ha:

$(ue_1)\ (ue_2) = ue_3 = uv$ $(ue_2)\ (ue_1) = ue_3 = uv$

Ora dobbiamo distinguere i tre casi che si vengono a creare per i diversi valori di ?.

1. ?>0

In tale ipotesi l'espressione è reale ed allora la determinazione principale di *u* lo sarà e così quella di

Ne segue che i numeri e_1u, e_2u e così e_1v, e_2v saranno complessi coniugati e quindi la radice $x_1=u+v$ sarà reale, mentre le altre due saranno complesse coniugate.

2. ?=0

In questa ipotesi abbiamo che le due determinazioni reali *u* e *v* coincidono nel valore [redacted] e pertanto l'equazione ha tre radici reali, una radice semplice

[redacted]

e una radice doppia:

$x_2 = x_3 = ue_1 + ue_2 = u(e_1 + e_2) = -u$

3. ?